## Druga zasada indukcji matematycznej

Niech $m$ będzie liczbą całkowitą, niech $p(n)$ będzie ciągiem zdań zdefiniowanych na zbiorze $\{n \in \mathbb{Z}\colon n \geqslant m\}$ oraz niech $l$ będzie nieujemną liczbą całkowitą. Jeśli

(P) wszystkie zdania $p(m), \ldots, p(m+l)$ są prawdziwe oraz

(I) dla $k > m+l$ zdanie $p(k)$ jest prawdziwe, jeśli wszystkie zdania $p(m), \ldots, p(k-1)$ są prawdziwe,

to zdanie $p(n)$ jest prawdziwe dla wszystkich $n \geqslant m$.

## Zadania

1. Udowodnij, że
$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = n\frac{1+n}{2} \quad \text{dla } n \in \mathbb{P}.$$
2. Udowodnij, że liczba $11^n - 4^n$ jest podzielna przez 7 dla wszystkich $n \in \mathbb{P}$.
3. Dla $n \in \mathbb{P}$ udowodnij, że $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leqslant 2\sqrt{n} - 1$.
4. Udowodnij, że dla $n \in \mathbb{N}$ rozwiązaniem równania rekurencyjnego:
$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 4$$
jest $a_n = 3n + 1$.
5. Udowodnij, że
$$1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
dla wszystkich $n \geqslant 1$.
6. Udowodnij równoważność
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$
7. Udowodnij przez indukcję, że zbiór $n$-elementowy ma $2^n$ podzbiorów.
8. Udowodnij, że
$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$$
dla wszystkich $n \geqslant 1$.

9. Rozważmy ciąg liczb całkowitych $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$, gdzie

$$\begin{aligned} a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 3 & \qquad \text{oraz} \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} & \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{P} \text{ gdzie } n \geqslant 3. \end{aligned}$$

Pokaż, że $a_n \leqslant 3^n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

10. Udowodnij, że

$$\sum_{i=1}^{n} (i)(i!) = (n+1)! - 1$$

dla wszystkich $n \geqslant 1$.

11. Udowodnij, że dla wszystkich $n \in \mathbb{P}$, $n > 3 \Rightarrow 2^n < n!$

12. Rozważ następujące równania:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 && (1) \\ 2+3+4 &= 1+8 && (2) \\ 5+6+7+8+9 &= 8+27 && (3) \\ 10+11+12+13+14+15+16 &= 27+64 && (4) \end{aligned}$$

Odgadnij ogólny wzór i udowodnij jego poprawność.

13. Udowodnij przez indukcję, że

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

Przyjmujemy, że $\binom{n}{k} = 0$ dla $k < 0$. Skorzystaj z tożsamości $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

## Sumy — wzory do zapamiętania

$$\sum_{k\in K} ca_k = c\sum_{k\in K} a_k, \qquad \text{(prawo rozdzielności)}$$

$$\sum_{k\in K} (a_k + b_k) = \sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K} b_k, \qquad \text{(prawo łączności)}$$

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{\pi(k)\in K} a_{\pi(k)}, \qquad \text{(prawo przemienności)}$$

$$a_k = a_{k-1} + d \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n), \qquad \text{(szereg arytmetyczny)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad \text{dla } x \neq 1, \qquad \text{(szereg geometryczny)}$$

$$\ln n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n + 1, \quad \text{dla } n \geqslant 1, \qquad \text{(szereg harmoniczny)}$$

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k,$$

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1},$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$$\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1},$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n},$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1},$$

$$\int_{m-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=m}^{n} f(k) \leqslant \int_{m}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

jeżeli $f(k)$ jest monotonicznie rosnąca,

$$\int_{m}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=m}^{n} f(k) \leqslant \int_{m-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

jeżeli $f(k)$ jest monotonicznie malejąca.

## Metody rozwiązywania sum:

1. znaleźć gdzieś rozwiązanie,
2. zgadnij odpowiedź, udowodnij ją przez indukcję,
3. zaburz sumę,
4. zamień sumy na całki,
5. wykorzystaj funkcje tworzące,
6. za pomocą Maximy (*http://maxima.sourceforge.net*).

## Zadania — dowolną metodą znajdź postać zwartą podanych sum

1. $\sum_{k=1}^{n} k^2$,
2. $\sum_{k=1}^{n} k^3$,
3. $\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{2^{i+1}}$,
4. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$,
5. $\sum_{k=1}^{n} 9^k \binom{n}{k}$,
6. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$,
7. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$,
8. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}$,
9. $\sum_{k=1}^{n} \ln k$.

## Rozwiązania

1) $\frac{2\,n^3+3\,n^2+n}{6}$, 2) $\frac{n^4+2\,n^3+n^2}{4}$, 3) $1-(n+2)\;2^{-n-1}$, 4) $\frac{n}{n+1}$, 5) $10^n-1$, 6) $\frac{n\,2^n}{2}$, 7) $2^n$, 8) $\frac{2^n}{n!}$, 9) $\sum_{k=1}^{n} \ln k \leqslant (n+1)\ln(n+1) - n$.

## Notacja asymptotyczna — definicje i twierdzenie

Dla danej funkcji $g(n)$ przez $\Theta(g(n))$ oznaczamy zbiór funkcji

$$\Theta(g(n)) = \{f(n)\colon \text{istnieją dodatnie stałe rzeczywiste } c_1,\ c_2 \text{ i liczba naturalna } n_0 \\ \text{takie, że } 0 \leqslant c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n) \text{ dla wszystkich } n \geqslant n_0\}.$$

Dla danej funkcji $g(n)$ przez $O(g(n))$ oznaczamy zbiór funkcji

$$O(g(n)) = \{f(n)\colon \text{istnieją dodatnia stała rzeczywista } c \text{ i liczba naturalna } n_0 \\ \text{takie, że } 0 \leqslant f(n) \leqslant cg(n) \text{ dla wszystkich } n \geqslant n_0\}.$$

Dla danej funkcji $g(n)$ oznaczamy przez $\Omega(g(n))$ zbiór funkcji

$$\Omega(g(n)) = \{f(n)\colon \text{istnieją dodatnia stała rzeczywista } c \text{ i liczba naturalna } n_0 \\ \text{takie, że } 0 \leqslant cg(n) \leqslant f(n) \text{ dla wszystkich } n \geqslant n_0\}.$$

Oto hierarchia pewnych znanych ciągów uporządkowanych w ten sposób, że każdy z nich jest $O$ od wszystkich ciągów na prawo od niego:

$$1, \log_2 n, \ldots, \sqrt[3]{n}, \sqrt{n}, n, n\log_2 n, n\sqrt{n}, n^2, n^3, \ldots, 2^n, n!, n^n.$$

## Własności do zapamiętania

Jeśli $f(n) = O(g(n))$ i $c$ jest stałą, to $c \cdot f(n) = O(g(n))$.
Dla dowolnych ciągów $a(n)$ i $b(n)$ mamy

(a) $O(a(n)) + O(b(n)) = O(\max\{|a(n)|, |b(n)|\})$.

(b) $O(a(n)) \cdot O(b(n)) = O(a(n) \cdot b(n))$.

Dla dowolnych dwóch funkcji $f(n)$ i $g(n)$ zachodzi zależność $f(n) = \Theta(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(n) = O(g(n))$ i $f(n) = \Omega(g(n))$.
$f(n) = O(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Omega(f(n))$.
Jeśli $P(n) = a_0 + a_1 n + \cdots + a_m n^m$ jest wielomianem stopnia $m$, to $P(n) = O(n^m)$.
Jeśli $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$ gdzie $c \neq 0$ oraz $c \neq \infty$, to $f(n) = \Theta(g(n))$.
Jeśli $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, to $f(n) = O(g(n))$.
Reguła de L'Hospitala: niech funkcje $f(x)$ i $g(x)$ będą określone i różniczkowalne oraz $g'(x) \neq 0$ dla wszystkich $x > c$; jeżeli $\lim_{x\to+\infty} f(x) \to +\infty$ i $\lim_{x\to+\infty} g(x) \to +\infty$, ale istnieje granica $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

## Zadania

Dla każdego z poniższych ciągów podaj ciąg $a(n)$ z hierarchii przedstawionej na poprzedniej stronie taki, że $f(n) = O(a(n))$ oraz $a(n)$ znajduje się możliwie najbardziej na lewo w tej hierarchii. Odpowiedź uzasadnij.

1. $f(n) = \log 1 + \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n$
2. $f(n) = \log 1 + \log 2 + \log 4 + \cdots + \log 2^n$
3. $f(n) = 5n^8 + 10^{200}n^5 + 3n + 1$
4. $f(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$
5. $f(n) = \log(n!)$
6. $f(n) = 2^n + O(n^2)$
7. $f(n) = (\log n)^2$
8. $f(n) = \log\log n$
9. $f(n) = 4n\log n + n$
10. $f(n) = 4n\log(n^2 + 1)$
11. $f(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$
12. $f(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\log k}{k}$
13. $f(n) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$
14. $f(n) = \sum_{k=1}^{n} k^{-1}$
15. $f(n) = \log_{3/2} n$

### Rekurencja uniwersalna

Metoda rekurencji uniwersalnej podaje „uniwersalny przepis” rozwiązywania równania rekurencyjnego postaci

$$T(n) = g(n) + u\,T(n/v), \tag{5}$$

dla stałych $u \geqslant 1$, $v > 1$, dodatniej funkcji $g(n)$ oraz dostatecznie wielu wartości początkowych definiujących ciąg $(T(0), T(1), T(2), \ldots)$. Rekurencja (5) opisuje czas działania algorytmu, który dzieli problem rozmiaru $n$ na $u$ podproblemów, każdy rozmiaru $n/v$. Każdy z $u$ podproblemów jest rozwiązywany rekurencyjnie w czasie $T(n/v)$. Koszt dzielenia problemu oraz łączenia rezultatów częściowych jest opisany funkcją $g(n)$.

Rząd wielkości rozwiązania rekurencji
$T(n) = g(n) + u\,T(n/v)$

| $g(n)$ | $u, v$ | Rząd wielkości $T(n)$ |
|---|---|---|
| $\Theta(1)$ | $u = 1$ | $\Theta(\log n)$ |
| | $u \neq 1$ | $\Theta(n^{\log_v u})$ |
| $\Theta(\log n)$ | $u = 1$ | $\Theta[(\log n)^2]$ |
| | $u \neq 1$ | $\Theta(n^{\log_v u})$ |
| $\Theta(n)$ | $u < v$ | $\Theta(n)$ |
| | $u = v$ | $\Theta(n \log n)$ |
| | $u > v$ | $\Theta(n^{\log_v u})$ |
| $\Theta(n^2)$ | $u < v^2$ | $\Theta(n^2)$ |
| | $u = v^2$ | $\Theta(n^2 \log n)$ |
| | $u > v^2$ | $\Theta(n^{\log_v u})$ |

*Uwaga:* $u$ i $v$ są liczbami dodatnimi, niezależnymi od $n$ oraz $v > 1$.

W przypadkach nieopisanych powyższą tabelą przydaje się nastepujące twierdzenie.
Niech $a, b \in \mathbb{R}^+$, $b > 1$, i niech $f\colon [1, \infty] \mapsto \mathbb{R}^+$. Wtedy rekurencja

$$T(n) = \begin{cases} f(n), & \text{jeśli } 1 \leqslant n < b; \\ a\,T(n/b) + f(n), & \text{jeśli } n \geqslant b \end{cases}$$

ma rozwiązanie

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \log_b n \rfloor} a^i f(n/b^i).$$

W szczególności:

$$T(n) = \begin{cases} O(n^{\log_b a}), & \text{jeśli } f(n) = O(n^p),\ p < \log_b a; \\ O(n^{\log_b a} (\log_b n)^{p+1}), & \text{jeśli } f(n) = O(n^{\log_b a} (\log_b n)^p),\ p > -1; \\ O(n^{\log_b a} \log \log n), & \text{jeśli } f(n) = O(n^{\log_b a} (\log_b n)^p),\ p = -1; \\ O(n^{\log_b a}), & \text{jeśli } f(n) = O(n^{\log_b a} (\log_b n)^p),\ p < -1; \\ O(n^p), & \text{jeśli } f(n) = \Theta(n^p),\ p > \log_b a. \end{cases}$$

## Zadania

Rozwiąż poniższe rekurencje:

1. $T(n) = 2\,T(n/2) + n$
2. $T(n) = \begin{cases} n \log n & \text{dla } 1 \leqslant n < 2; \\ 2\,T(n/2) + n \log n & \text{dla } n \geqslant 2 \end{cases}$
3. $T(n) = \begin{cases} n^{3/2} & \text{dla } 1 \leqslant n < 2; \\ 2\,T(n/2) + n^{3/2} & \text{dla } n \geqslant 2 \end{cases}$
4. $T(n) = 2\,T(n/2) + n^2$
5. $T(n) = 3\,T(n/2) + \Theta(n)$
6. $T(n) = 3\,T(\lfloor n/4 \rfloor + 1) + 2$, $T(1) = 1$
7. $T(n) = T(n/2) + n$
8. $T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} T(i) + 1$, $T(1) = 1$
9. $T(n) = T(n/5) + 7$
10. $T(n) = 16\,T(n/4) + n$
11. $T(n) = T(3n/4) + 5$